

«امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل دانشگاه صنعتی امیرکبیر»

مدت: ۱۲۰ دقیقه

یکشنبه: ۹۲/۳/۱۲

۱- الف) نقاط غیرعادی منظم (منفرد منظم) معادله‌ی دیفرانسیل زیر را مشخص کنید. (۵ نمره)

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

ب) ریشه‌های معادله شاخصی را به ازای آن نقاط بیابید. (۸ نمره)

ج) یک جواب معادله را حول $x=0$ به دست آورید. (۱۲ نمره)

د) فقط فرم جواب اول و دوم را به ازای نقطه غیرعادی منتظم دیگر بنویسید. (۵ نمره)

۲- با استفاده از تغییر متغیر $t^2 = e^x$ معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + (e^x - \frac{1}{4})y = 0$ را حل کنید. (۲۰ نمره)

۳- لاپلاس و لاپلاس وارون‌های زیر را حساب کنید.

$$\text{الف: } L \left[\int_0^t (t-x)^4 (xe^{2x} \operatorname{Sinh} x) dx \right] \quad (۱۲ \text{ نمره})$$

$$\text{ب: } L^{-1} \left[\ln \left(\frac{s^2+1}{s^2+4} \right) + \frac{1}{\sqrt{4s-1}} \right] \quad (۱۰ \text{ نمره})$$

۴- با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله‌ی زیر را حل کنید. (۲۰ نمره)

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} - (2+t) \frac{dy}{dt} + 3y = t-1, \quad y(0) = 0$$

۵- $x(t)$ را از دستگاه زیر بیابید.

$$(۱۸ \text{ نمره}) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' + x = u_{\frac{\pi}{2}}(t) \delta(t - \frac{\pi}{2}) + \int_0^t u_{\frac{\pi}{2}}(t-\tau) \operatorname{Cos}(\tau) d\tau \\ y(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

موفق باشید